ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА БЕОГРАД
МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ, НАУКЕ И ТЕХНОЛОШКОГ РАЗВОЈА

РЕВИЈАЛНО МАТЕМАТИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

СРБИЈА, 14.04.2020.

8. разред

1. Како мора да буде $x + |x| \neq 0$, значи да је $x > 0$, па је једино решење број 3.

2. Означимо са a_1 тражену дуж, а са P_1 и P површине новодобијеног и полазног троугла. Из $\frac{a_1}{10} = \sqrt{\frac{P_1}{P}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ добијамо $a_1 = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}cm$.

3. Како је $v_2 = v_1 - 20\% v_1 = \frac{4}{5}v_1$, то је $v_1 = \frac{5}{4}v_2 = v_2 + 25\% v_2$. Брзину треба повећати за 25%.

4. Број $n^3 + 6n^2 + 8n = n(n+2)(n+4)$ дељив је са 3 за све природне бројеве n. Да би био дељив и са 32 потребно је да n буде облика $4k$ или $8k+6$. Дакле, за n долазе у обзир бројеви $4, 8, 12, \ldots, 2016$ (504 броја) и $6, 14, 22, \ldots, 2014$ (252 броја). То је укупно 756 бројева.

5. Од укупног броја карата код којих су на прва три места различите непарне, а на друга три места различите парне цифре, одузимамо број оних карата овог облика код којих су 9 и 6 суседна цифре: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 7500 - 300 = 7200$.

6. Нека та раван садржи ивицу AB тетраедра, а ивицу DC сече у тачки E. Означимо са F подножје висине из E на BC у троуглу BCE. Тада је $CE = 8cm$, $CF = 4cm$, $BF = 8cm$ и $BE = 4\sqrt{7}cm$. Ако је M средиште ивице AB, биће $EM = \sqrt{BE^2 - BM^2} = 2\sqrt{19}$, па је тражена површина $\frac{12 \cdot 2\sqrt{19}}{2} = 12\sqrt{19}cm^2$.

7. Означимо тражени број са $\overline{xyz}$. Како је $9 \mid x + y$, мора бити $x + y = 9$, тј. $y = 9 - x$, па из $100x + 10(9-x) + z - (100z - 10(9-x) - x) = 99$ добијамо $99(x - z) = 99$, тј. $x - z = 1$. Сада је $z + 1 + 8 - z + z = 12$, тј. $z = 3$. Тражени број је 453.

8. Површина троугла SOC је $\frac{a^2}{8}$, а странице тог троугла су $OS = \frac{a}{2}$, $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $SC = \frac{a}{2}\sqrt{5}$. Полупречник описаног круга троугла налазимо из формуле $R = \frac{abc}{4P} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{5}}{4 \cdot \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{5}{2}cm$.

9. Означимо дужину странице BC са x. Из сличности троуглова AMD и BCM налазимо $\dfrac{x}{4} = \dfrac{9}{x}$, тј. $x = 6$, па је тражена површина $\dfrac{6 \cdot (9+4)}{2} = 39cm^2$.

10. Претпоставимо најпре да ни p ни q нису дељиви са 3. У том случају, ако је $p \equiv q \pmod 3$, лева страна једнакости дељива је са 3, а десна није, а ако није $p \equiv q \pmod 3$, онда је десна страна једнакости дељива са 3, а лева није. Дакле, мора да један од простих бројева p или q буде дељив са 3. Ако је $q = 3$, онда је $p^3 - 243 = (p+3)^2$, тј. $p(p^2 - p - 6) = 252$. Тада $p \in \{2, 3, 7\}$. Прва два случаја не доалзе у обзир, већ је $p = 7$, што даје и једино решење $(7, 3)$. Наиме, ако је $p = 3$, биће због $p^3 > q^5, q^5 < 27$, што није могуће.

11. Нагибни углови бочних страна су оштри углови правоуглих троуглова из омотача пирамиде, тако да су странице основе $a = H = 3\sqrt{3}$ и $b = \dfrac{H\sqrt{3}}{3} = 3$, а површина основе $ab = 9\sqrt{3}$.

12. Тражимо број целобројних решења једначине: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$. Број 25 се на 12 начина може написати као збир квадрата два цела броја: $4^2 + 3^2 = (-4)^2 + 3^2 = 4^2 + (-3)^2 = (-4)^2 + (-3)^2 = 3^2 + 4^2 = (-3)^2 + 4^2 = 3^2 + (-4)^2 = (-3)^2 + (-4)^2 = 0^2 + 5^2 = 5^2 + 0^2 = 0^2 + (-5)^2 = (-5)^2 + 0^2$, што значи да укупно има 12 оваквих тачака.